La sorprendente importancia de las Matemáticas: reflexiones y reminiscencias.

Antonio Córdoba Barba

Catedrático de Análisis Matemático, UAM.

Director del I.C.M.A.T.

Deseo iniciar este discurso expresando mi agradecimiento por el honor que de manera tan generosa me ha otorgado la Academia de Ciencias de la Región de Murcia. Poseo unas profundas raíces murcianas que me hacen sentir especialmente halagado ante esa distinción.

¿Qué ha sucedido? ¿Cómo he llegado yo a merecerla? ¿Cómo me convertí en un investigador matemático? Son preguntas perentorias para quien, créanme, no le cuesta demasiado trabajo reconocerse en aquel niño, de entre diez y dieciséis años de edad, que recorría diariamente el Camino de Puente Tocinos, vía la Puerta de Orihuela, para llegar al Instituto Alfonso X El Sabio, ubicado entonces en su antiguo caserón frente al parque de Ruiz Hidalgo. La respuesta, no obstante, se encuentra en el afecto y apoyo generosos de mi familia y de algunos amigos y profesores. Sin ellos hoy yo no estaría aquí.

Para la mayoría de los ciudadanos, y yo diría que incluso si esta la estimamos entre los más cultos, las Matemáticas resultan lejanas, abstrusas y quizás algo esotéricas. Pero también para mí, y muchos de nosotros, los matemáticos, lo mismo puede a veces afirmarse respecto a los temas distantes de las áreas que cultivamos. Por eso, y presentando mis disculpas de antemano a la Academia, he pensado que, en vez de centrar mi discurso en alguno de los resultados que he obtenido a lo largo de mi carrera, y que quizás hayan motivado el honor que hoy se me otorga, voy a ofrecerles unas reflexiones y unas reminiscencias personales acerca de la importancia de las matemáticas y su evolución en estas últimas décadas.

Aunque me han interesado problemas de áreas tan distintas como son la Teoría de los Números, la Geometría de las Superficies Mínimas, la Mecánica de Fluidos o la estructura de la materia a partir de los primeros principios de la Mecánica Cuántica, creo que por formación y dedicación debo considerarme mayormente un analista.

Simplificando un tanto la historia, podemos decir que en un principio fueron la Aritmética, la Geometría y la Astronomía, que florecieron entre los griegos clásicos. Luego vino el Álgebra de los árabes y aquellos ingeniosos italianos del Renacimiento. El Análisis es posterior, de tiempos del barroco, y tiene al Cálculo Diferencial de Newton y Leibniz en sus orígenes más nítidos. Pero desde un principio demostró ser un instrumento poderoso sin el cual resulta inexplicable la revolución científica, primero, y la industrial, después, que le deben sus fundamentos teóricos. La talla científica de Newton, con su carácter tan excepcional, ilustra la naturaleza de esa influencia: al tiempo que crea la noción de "derivada" para calcular tangentes a curvas y velocidades instantáneas, así como la de "integral", que permite hablar con precisión, y estimar longitudes, áreas y volúmenes, utiliza estos instrumentos para dar una teoría de la gravitación, explicar el movimiento de los cuerpos celestes o prever que la Tierra está achatada por los polos haciendo unos precisos cálculos: "*Sans sortir chez lui*", como bien dijo luego Voltaire. Se trata, no obstante, de un momento especialmente excelso de la ciencia, que tantas veces se ha pretendido después emular y repetir.

Los analistas han, o debo decir hemos, ido perfeccionando el Cálculo Diferencial para hacerlo mucho más potente y susceptible de ser aplicado en situaciones muy generales, como exige modelar y entender la evolución de muchos fenómenos naturales, con sus discontinuidades, singularidades y turbulencias. Me gusta traer a colación a un amigo japonés, Koji Ohkitani (University of Sheffield), quien en un congreso de Mecánica de Fluidos celebrado en Palo Alto, en el año 2009, escribió en la pizarra la frase siguiente: "*Analista = Cazador*". Porque, según nos dijo, el analista, como el cazador, está en su casa-taller durante mucho tiempo poniendo a punto sus armas y afilando sus cuchillos. De vez en cuando, sale al campo a cazar, solo o en compañía de otros analistas-cazadores. Pero, una vez conseguida la presa, vuelve enseguida a casa para seguir perfeccionando sus instrumentos.

Debo a Miguel de Guzmán, un querido amigo matemático nacido en Cartagena, el contacto con dos eminentes analistas, Alberto Calderón y Antoni Zygmund, quienes visitaron la Universidad Complutense cuando yo cursaba el penúltimo curso de la Licenciatura, y tuvieron a bien animarme y apoyarme en la obtención de una beca de doctorado de la Universidad de Chicago. Con la experiencia de varias décadas en la universidad española, y mi reciente labor como director del ICMAT, en las que he tenido que lidiar con la rigidez de nuestro sistema de contratación y las dificultades que nos impone para competir en igualdad de condiciones con otros centros de excelencia científica del mundo, no deja de maravillarme la agilidad de la Universidad de Chicago, que me admitió en su escuela de doctorado un año antes de terminar mis estudios de Licenciatura en Madrid.

La Universidad de Chicago, a principios de los años setenta, era un centro de referencia mundial para el Análisis Armónico. Además de los anteriormente citados, Alberto Calderón y Antoni Zygmund, se encontraba también la figura emergente de Charles Fefferman, quien fue portada del Times Magazine por ser entonces el *full profesor* más joven de la historia de la universidad norteamericana. Posteriormente recibió la medalla Field, galardón análogo al premio Nobel para los matemáticos, así como otros varios premios y honores en justa recompensa por sus muchas y profundas aportaciones.

Fefferman, mi amigo Charlie, fue director de mi tesis doctoral y luego colaborador en muchos proyectos conjuntos. Algunos de ellos desarrollados en España durante sus frecuentes visitas, que han servido, además, para que varios españoles hayan cursado el doctorado bajo su dirección en la Universidad de Princeton, donde es ahora profesor distinguido. Charlie es también miembro del ICMAT, donde dirige un Laboratorio de Mecánica de Fluidos, y ha sido un componente importante del comité editorial de la Revista Matemática Iberoamericana, una de las empresas científicas de las que me siento especialmente orgulloso y que ha contribuido grandemente a poner a España en el mapa de las matemáticas actuales.

No es fácil describir en pocas palabras un área tan proteica como es el Análisis Armónico, ni es quizás esta la ocasión más apropiada para intentarlo. No obstante señalemos que un hito importante fue la presentación realizada por Joseph Fourier a la Academia Francesa de Ciencias, en el año 1807, de una memoria acerca de la propagación del calor. Su importancia radicó no solo en las aplicaciones, sino también en la universalidad del método empleado, basado en la hipótesis de que una función periódica podía ser expresada por medio de una serie trigonométrica, una combinación lineal de senos y cosenos de distintas frecuencias.

El método de Fourier permitió tratar de forma sistemática otras ecuaciones de la Física Matemática de su tiempo, y hoy sabemos que está en el núcleo de las ecuaciones que gobiernan el sonido, la luz y el calor. Por tanto, no debe resultar extraño que el Análisis Armónico resulte ubicuo entre los modelos matemáticos de la ciencia. Y que se hayan creado teorías para entender la naturaleza de los desarrollos trigonométricos introduciendo también importantes operadores vicarios, tales como las integrales singulares, las funciones maximales y las derivadas fraccionarias, que controlan la convergencia de las series e integrales de Fourier.

A partir de los trabajos pioneros de Calderón y Zygmund, los miembros de la escuela de Chicago, a la que me enorgullece pertenecer, desarrollamos la potencia de esos instrumentos hasta convertirlos en un arma poderosa que pudo dar respuesta a una mayoría de cuestiones básicas de los modelos lineales de la ciencia. Quedan, claro está, muchas otras por contestar e investigar, pero la teoría desarrollada es muy potente y sus aplicaciones numerosas, especialmente ahora que los ordenadores modernos permiten implementar con efectividad los algoritmos del análisis armónico: la manera como el TAC dibuja sus imágenes de los tejidos; las matemáticas de la Resonancia Magnética Nuclear; el método por el que nuestro teléfono móvil envía fotografías; el tratamiento y procesado de imágenes; las tecnologías del sonido: filtros, sintetizadores, diseño de auditorios musicales eficientes; la interpretación de los espectros de difracción de rayos X por los cristales, tan importante en la física del estado sólido, o los modelos para entender las vibraciones de la Tierra y la propagación de las ondas sísmicas, son algunos ejemplos fehacientes del éxito del método de Fourier, y su contribución fundamental a esta revolución digital, científica y tecnológica, en la que estamos inmersos. He aquí un poema que escribí para festejarlo:

Verde,

Verde esmeralda,

Azul turquesa, azul ultramar.

Índigo, violeta.

Síntesis de luz.

Ondas, vibraciones, trigonometría.

Espirales, remolinos, puntos de fuga.

Venus de proporciones divinas,

Fuego que da la vida,

El calor y el color.

Amarillo, naranja,

Rojo, carmín.

Además de estas aportaciones del Análisis Armónico que ponen de manifiesto la importancia de las matemáticas en la ciencia, la tecnología y la vida cotidiana, durante mi trayectoria profesional he sido testigo privilegiado de otros muchos logros, algunos de los cuales estaban señalados como auténticos objetos del deseo por su historia y dificultad. Baste mencionar la demostración del "*último teorema de Fermat*", culminada por Andrew Wiles en 1994, o la "*conjetura de Poincaré*" por Grigory Perelmann, que data de 2005, y que han tenido, en ambos casos, una fuerte repercusión mediática. Pero también el problema de los "*cuatro colores*", resuelto por Kenneth Appel y Wolfgang Haken a mediados de los setenta, y el empaquetamiento eficiente de esferas, problema de Kepler también llamado de los fruteros, por Thomas Hales, en 1989. Estando estos dos últimos resultados emparentados por el hecho, en su momento muy novedoso, de presentar demostraciones asistidas por ordenador. Se trata de una nueva vuelta de tuerca en la evolución del concepto de demostración: después de un razonamiento riguroso con los métodos tradicionales se llega a un punto en el que la verdad depende de una simple comprobación que atañe a un número finito de casos, pero ese número es tan grande que queda totalmente fuera de las capacidades humanas de llevarla a cabo sin ayuda de un computador.

Puedo afirmar pues, con cierta satisfacción, que el período de mi vida activa como investigador ha sido fascinante y rico en descubrimientos. He tenido además el privilegio de vivirlo en parte siendo profesor de la Universidad de Princeton, institución que me ofreció un puesto al acabar mi doctorado en Chicago y en dónde es fácil conocer y tratar a los autores de todos los resultados nuevos y significativos. La combinación entre el

Departamento de Matemáticas de la Universidad y el *Institute for Advanced Study* hacen de Princeton un sitio privilegiado para nuestra ciencia. Ahora tengo amigos y colaboradores que ejercen en ambas instituciones, pero al inicio de mi carrera se trataba para mí de un lugar mítico que había contado con Albert Einstein, Kurt Gödel y John von Neumann entre quienes formaron la primera etapa del Instituto. Por cierto, fue entonces cuando el tercero de los mencionados dirigió el proyecto E.N.I.A.C., con el que se construyó uno de los primeros ordenadores modernos, ante el escepticismo de la mayoría de los matemáticos y físicos teóricos del IAS.

He traído a colación estas historias porque creo firmemente que el centauro formado por un matemático y su ordenador es uno de los especímenes más interesantes de la ciencia contemporánea. Protagonista, creo yo, de los cambios más radicales que ha experimentado el oficio de investigador matemático a lo largo de mi carrera. Tanto en cuanto a la naturaleza de los temas de investigación, como a la manera de hacerlo, afectando a las publicaciones, a nuestra relación con las bibliotecas, facilitando las colaboraciones a distancia, y propiciando la aparición de matemáticos colectivos (*polymath*) que unen en una tarea concreta a multitud de cerebros y capacidades de cálculo.

Los matemáticos hacemos uso de los ordenadores para obtener datos experimentales en los que encontrar patrones y recurrencias que permitan formular conjeturas y señalar caminos por donde avanzar. Pero también para llevar a cabo cálculos muy complejos, tales como los que son necesarios para diseñar un avión, describir la trayectoria de un satélite o el tratamiento de imágenes.

La idea de que la evolución de los procesos de la Naturaleza puede ser descrita por medio de leyes matemáticas precisas es central en la ciencia. Los matemáticos, por razones obvias, estamos entre los científicos más reduccionistas y nos esforzamos en demostrar deductivamente, desde los primeros principios, la consistencia y las consecuencias de las diversas teorías. Se trata de una labor importante de certificación de que el modelo está bien propuesto, de que es lógicamente consistente y preparado para hacer previsiones. Lo que, en cierta medida, resulta análogo al papel que han desempeñado tradicionalmente los experimentos.

Desde hace pocos años se ha popularizado el término *big data* para procesar una ingente cantidad de datos de diversos tipos, incluyendo listados de consultas en internet, series temporales de altas frecuencias que aparecen en la evolución de los valores bursátiles, medidas astronómicas de objetos muy distantes, o en el tratamiento del material genético. Los computadores han hecho posible abordar estos asuntos, donde la labor del matemático no es tanto la demostración de nuevos teoremas, sino el uso de teorías sofisticadas que permiten diseñar algoritmos y hacer simulaciones numéricas que, en muchos casos, sustituyen a medidas y experimentos que son muy difíciles, costosos, o imposibles de realizar. Se trata de un fenómeno novedoso cuya incidencia en el devenir de la ciencia es todavía prematuro prever, pero que nos ayuda a discernir los objetivos de una genuina matemática aplicada.

No obstante, conviene precisar que la evidencia numérica no puede sustituir nunca a las demostraciones del método deductivo, y que existe una enorme distancia entre tener esa evidencia y disponer de una auténtica demostración. Al contrario, en algunas áreas que me son próximas, como es la mecánica de fluidos, ya tenemos un bestiario de casos en los que la evidencia numérica de existencia de singularidades ha sido luego desmentida por la prueba analítica de que la solución se prolongaba con continuidad a lo largo del tiempo. La historia de las Matemáticas permite caracterizarlas por el uso sistemático de demostraciones rigurosas. Se trata de una práctica que se ha ido refinando a lo largo de muchos siglos y que las dota de una claridad y una seguridad que no se alcanzan en otras ciencias. La prueba de la existencia de infinitos números primos, o de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, que encontramos perfectamente desarrolladas en los Elementos de Euclides, son tan válidas ahora como lo fueron hace veintisiete siglos. En palabras del gran matemático inglés G. Hardy: *“El paso del tiempo no ha podido añadir una sola arruga a la belleza de esas magníficas demostraciones”.*

Según una frase famosa de Galileo, las Matemáticas son el lenguaje de la Naturaleza. Pero también una herramienta para otras ciencias y un estudio con su propia dinámica, fines y criterios. Se trata de una actividad de índole internacional donde las colaboraciones y las amistades no conocen fronteras, ni diferencias de razas o credos. Su lenguaje tan preciso facilita la comunicación entre los expertos, tengan el idioma que tengan, y el inglés, que es la *lingua franca* de la ciencia contemporánea, se habla con acentos y giros tan dispares que a veces parecen una Babel difícil de entender. No obstante, cuando la atención se centra en los teoremas, la precisión de su lenguaje intrínseco facilita enormemente la comunicación.

“*Un matemático, como un pintor o un poeta, es un hacedor de patrones. Si sus patrones son más permanentes que los de ellos es porque están hechos de ideas. Un pintor hace sus patrones con formas y colores, un poeta con palabras. Una pintura puede contener una idea, pero la idea es normalmente un lugar común y carece de importancia. En poesía no es lo que se dice, sino cómo se dice, la pobreza de las ideas no parecen afectar a la belleza del patrón verbal. Un matemático, por otro lado, no tiene otro material con que trabajar que sus ideas y, por tanto, sus construcciones están preparadas para durar más tiempo, ya que las ideas se gastan menos con el tiempo que las palabras. Los patrones matemáticos, como los de los pintores o los de los poetas, deben ser bellos; las ideas, como los* *colores o las palabras, deben juntarse de manera armónica. La belleza es el último test: no hay un lugar permanente en el mundo para las matemáticas feas.*"

Estas citas de G. Hardy están entresacadas de su celebrado libro "*A mathematician apology*", que es una referencia obligada para quien esté interesado en las relaciones entre las Matemáticas, la tecnología, el arte y la literatura. Parafraseando a Hardy, me gusta a veces decir que las Matemáticas son *"la orfebrería de ideas engarzadas en cadenas de razonamientos para demostrar una verdad"*. La interacción entre las matemáticas y la pintura ha tenido momentos espectaculares, como son, entre otros, el descubrimiento de la perspectiva por los pintores del Renacimiento y su contrapartida matemática en la creación de la llamada Geometría Proyectiva; la ruptura del punto de vista de los cubistas o el concepto de variedad, con sus cartas locales, por los geómetras contemporáneos; y el puntillismo o divisionismo postimpresionista de Seurat y la teoría de conjuntos de puntos de Cantor.

En mi propia obra he tenido la ocasión de poder relacionar fehacientemente la pintura abstracta neoplasticista de Mondrián y la suprematista de Malevich, con la extensión del llamado Teorema Fundamental del Cálculo de Newton y Leibniz en el contexto de la teoría de la medida de Lebesgue, que es un instrumento fundamental para que se hayan podido obtener esas aplicaciones del Análisis antes comentadas. De haber centrado este discurso en la exposición de alguno de mis hallazgos, seguramente hubiera elegido la demostración de la Conjetura de Zygmund, que fue un problema abierto y objeto del deseo del Análisis Armónico durante más de cincuenta años, y que atañe a la intrincada geometría, respecto a las propiedades de recubrimiento, que muestran las familias de paralelepípedos del espacio euclídeo cuando se quiere optimizar y controlar su solapamiento. Los dibujos que ilustran estos teoremas de recubrimiento óptimo, reproducen fielmente los cuadros de Mondrian y Malevich.

Cualquier ensayo en torno a la importancia de las Matemáticas no puede soslayar el papel que estas desempeñan en la educación de los ciudadanos, ya que junto con el aprendizaje del propio idioma constituyen uno de los pilares de la ilustración. Las Matemáticas sirven para instalar el sistema operativo en el cerebro humano: aprender cuándo unas consecuencias se deducen necesariamente de las hipótesis de partida y saber enlazar varios silogismos para lograr demostrar una verdad. También para lo contrario, o sea, reconocer y hacer saltar las alarmas cuando alguien nos está induciendo a unas conclusiones que no se siguen de los supuestos de partida. Toda disciplina bien presentada podría cumplir esa función, pero las Matemáticas están especialmente indicadas para hacerlo, por ser generalmente sencillos sus conceptos y claras sus definiciones, a diferencia de otras materias en las que el lenguaje es algo más confuso y barroco.

Estudiando las operaciones y las propiedades de los números enteros y de las figuras geométricas elementales (rectas, círculos, triángulos) pueden enlazarse varios silogismos y llevarnos a establecer proposiciones interesantes y nada triviales. Se trata de la grandeza del método deductivo, de la razón suficiente de Leibniz, que, administrado en las dosis oportunas, constituye quizás la mayor aportación de las Matemáticas a la educación de los ciudadanos.

Ahora bien, se mire como se mire, enseñarlas tiene una reconocida dificultad, dándose la paradoja de que las Matemáticas resulten difíciles a muchos alumnos por ser presuntamente fáciles. Fáciles en cuanto a la nitidez y claridad de los conceptos (número, recta, círculo, triángulo); difíciles por cuanto con ellos se pretende ir más allá de una simple enumeración, o relato de anécdotas y hechos, como suele ser el objetivo de otras asignaturas.

El sistema decimal de numeración y los algoritmos a que da lugar para llevar a cabo sumas, productos y divisiones, es una maravilla. No cabiendo la menor duda de que su conocimiento provee con un instrumento básico para la actividad cotidiana. La cuestión es cuando y en qué dosis, porque la literatura está llena de lamentos de escritores y personas cultivadas acerca del tedio y la dureza que les supuso en la infancia memorizar las tablas de multiplicar, hacer divisiones largas o, no digamos, la extracción de raíces cuadradas. Parece ser que una parte nada desdeñable de los ciudadanos salieron algo asustados de la experiencia y, durante el resto de sus vidas, asocian las Matemáticas no precisamente con la búsqueda de la verdad y la belleza, con el instrumento adecuado para entender las leyes de la Naturaleza, o con los algoritmos que hacen funcionar muchos de sus utensilios domésticos, sino más bien con una especie de tortura espiritual.

Pero el sistema decimal es relativamente reciente en la historia de la humanidad. Los griegos clásicos carecían de él y, sin embargo, desarrollaron un corpus matemático impresionante. Tampoco lo conocía Arquímedes, quien fue quizás el mayor científico de la antigüedad, capaz de llevar a cabo hazañas aritméticas de la envergadura del cálculo de varias cifras decimales del número pi. De manera que no es cierto que el entrenamiento de la mente en el sistema deductivo y el aprendizaje de las matemáticas impliquen, necesariamente, la memorización de tablas de multiplicar o el aprendizaje del acarreo en la evaluación de sumas enormes, que tanto parecen haber traumatizado a muchos de nuestros escritores y artistas. De manera que en sus escritos y películas presentan al profesor de matemáticas como al malo del relato: un señor malhumorado, feo y cascarrabias que martiriza la vida de sus simpáticos alumnos, obligándolos a memorizar cantando las tablas de multiplicar y otras rutinas por el estilo.

La docencia de las Matemáticas en estos primeros niveles es, por tanto, un asunto algo complicado por la propia naturaleza de su objetivo principal, que es enseñar a razonar. Se necesitaría un profesorado entusiasta, conocedor de ese arte de engarzar las ideas y no un mero transmisor de definiciones y rutinas de cálculo. Estableciendo una analogía con la enseñanza de la música, se precisan maestros que sepan tocar algún instrumento y no se limiten solamente a conocer algo de su historia y las reglas de su escritura. Naturalmente que ahí encontramos un problema muy serio, pero que es importante abordar, en cuanto a la preparación y estímulo de ese profesorado y la dotación de textos y medios apropiados que les ayuden en su difícil tarea.

Termino volviendo a las preguntas del principio. Las Matemáticas me han hecho formar parte de una interesante comunidad internacional y visitar Universidades e Institutos de muchos países donde también tengo colaboradores y amigos. Pero las raíces de mi vocación están en Murcia y creo que bajo el influjo principal de tres personas. En primer lugar de mi madre, que era maestra de escuela y me llevaba a sus clases antes de que yo tuviera la edad escolar. Era una escuela exclusivamente de niñas, en aquel tiempo de enseñanza segregada, y sus alumnas dominaban el idioma más allá de lo que estaba a mi alcance. Empero, no sé cómo, descubrí que con las cuentas era distinto, y ahí había un resquicio para que yo me hiciese valer ante aquellas niñas maravillosas, lo que me estimuló a aprender a una edad muy temprana las operaciones aritméticas y los rudimentos de geometría elemental.

Luego de mi padre, quien tenía un taller en nuestra casa del camino de Puente Tocinos donde yo pasé muchas horas felices de la infancia. Allí había tornos eléctricos, varios instrumentos de soldadura, una cuba de niquelar y otra, mucho más delicada, de cromado que exigía un control de concentraciones y de temperatura. Mi padre contaba apenas catorce años cuando la guerra, y solo pudo asistir a la escuela primaria, pero tenía una auténtica fascinación por las máquinas, la ciencia y la tecnología que logró transmitirme.

Finalmente, durante mis últimos años en el Instituto Alfonso X tuve a un magnífico profesor, D. Francisco Soto Iborra, quien fue responsable de que yo optase por la Licenciatura de Matemáticas. En sus clases Soto solía plantearnos un problema y lograba estimular un diálogo en el que, con su sabia ayuda, íbamos entre todos encontrando la solución. En una ocasión, estábamos analizando un tema de regresión lineal cuando a mí se me ocurrió un método algo distinto del indicado en el texto. Don Francisco me animó a desarrollar mis ideas, y esa noche, ya en mi casa, experimenté por primera vez la excitación intelectual de adentrarme en *terra incognita*. Logré escribir una solución que me pareció elegante y que expuse en clase al día siguiente. Entonces Soto me sugirió que la redactara para su posible publicación en La Gaceta Matemática. Y aunque ahora ese artículo tan ingenuo me hace sonreír, se trata, no obstante, de mi primera publicación científica.

Permítanme acabar dando de nuevo las gracias a esta docta Academia por el gran honor que confieren a quien, como tantos otros matemáticos:

Ha pretendido ser orfebre de ideas,

engarzándolas en bellas cadenas,

que venzan el paso del tiempo.

Y a ese empeño dedico mis horas,

buscando la plata y el oro,

escondidos, como esquivo tesoro,

en un Dédalo de números y fórmulas.